Université Abdelmalek ESSAADI (UAE)
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima, Maroc

Module: Analyse 3 - Fonctions de Plusieurs Variables-

PROFESSEUR A. MOUSSAID

Devoir Libre
A Rendre le 11/01/2021
A.P. 2: 2020-2021

EXERCICE 1 (3 pts)
Soient $(E;d)$ un espace métrique, A un sous-ensemble non vide de E et x un élément de E.Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $x \in \overline{A}$
b) $d(x,A) = 0$
c) il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x

EXERCICE 2 (3 pts)
Soit E l'espace des fonctions réelles continues définies sur $I = [0,\pi]$.
On munit E de la norme $\|f\|$ associée au produit scalaire $< f, g >= \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$.

Montrer que la suite (f_n) de E définie par

$$f_n(0) = n, \quad f_n(x) = \inf(n, x^{-\frac{1}{3}}) \quad \text{pour} \quad x > 0$$

est une suite de Cauchy de l'espace E. l'espace E est- il complet pour cette norme ?

EXERCICE 3 (6 pts)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

1°) La fonction f est-elle continue en $\mathbb{R}^2$?
2°) Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer ensuite $\nabla f(0,0)$
3°) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
4°) La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$

EXERCICE 4 (4 pts)
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui est définie par

$$f(x,y,z) = (x + y^2 + z, xy^2z, x^2z + xy)$$

Justifier la différentiabilité de f, préciser sa différentielle et sa matrice jacobienne. Peut-on calculer le Jacobien de f?

EXERCICE 5 (4 pts)
On considère la courbe plane d'équation

$$ye^x + e^y \sin(2x) = 0 \tag{1}$$

1. Vérifier que l'équation (1) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$

Bon Courage